ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 7 С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ОТДЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ «ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР» ИМЕНИ Г.И.ГОРЕЧЕНКОВАГОРОДА НОВОКУЙБЫШЕВСКА ГОРОДСКОГО ОКРУГА НОВОКУЙБЫШЕВСК САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ

446218, Самарская область, г.Новокуйбышевск, ул. Свердлова, д. 12, тел. 4-74-17

Р А С С М О Т Р Е Н О	П Р О В Е Р Е Н О	У Т В Е Р Ж Д Е Н О
на заседании ШМО Протокол № 1 от 29 августа 2022 г. Г.А. Фомичева	Зам. директора по УВР С.Н. Гайдукова 29 августа 2022 г.	приказом директора ГБОУ СОШ № 7 «ОЦ» г.Новокуйбышевска № 232 от 29 августа 2022 г.

ЭП

O="ГБОУ СОШ № 7 ""ОЦ"" г.Новокуйбышевска", CN=Иванова Е.В., E=sch7_nkb@samara.edu.ru
00e90ef5dd17927159
2022.08.30 10:09:49+04'00'

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

элективного курса

«В мире иррациональности»

11 класс

Составитель:
Фомичева Галина Анатольевна, учитель математики

г.Новокуйбышевск,
2022 г.

Пояснительная записка

Данная программа предназначена для учащихся 11 класса. Основная функция курса по выбору направлена на повышение интереса к математике. Общеизвестно, что в заданиях ЕГЭ в 11классе довольно часто предлагаются иррациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и системы неравенств (задание С3). Нередко учащиеся не могут справиться с простейшими уравнениями и неравенствами, что свидетельствует об отсутствии навыков решения таких уравнений и неравенств. Известно, что в программах по математике этим уравнениям и неравенствам отводится незначительное место.

Каждое занятие направлено на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, а главное отработать навыки решения уравнений, неравенств, систем уравнений и систем неравенств.

Решение иррациональных уравнений, неравенств и систем открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях. Примеры, содержащие радикалы обладают диагностической и прогностической ценностью, так как с помощью этих задач можно проверить знание основных разделов школьной математики, уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности, а главное, перспективные возможности успешного овладения курса математики.

Программа курса рассчитана на 17 ч и предполагает использование активных форм и методов обучения. При изучении курса предусмотрено проведение самостоятельных и контрольных работ. В технологии проведения занятий присутствует этап самопроверки, который предоставит учащимся возможность самим проверить свои решения.

Цели и задачи курса:

- ✓ изучение методов решения задач избранного класса и формирование умений, направленных на реализацию этих методов;
- ✓ сформировать у учащихся представление о задачах, содержащие радикалы их многообразие;
- ✓ научить применять аналитический метод в решении задач ;
- ✓ научить приемам графического решения задач содержащие радикалы;
- ✓ научить осуществлять выбор рационального метода решения задач и обосновывать сделанный выбор;
- ✓ способствовать подготовке учащихся к выпускному экзамену по математике.

Ожидаемые результаты

- ✓ уметь решать иррациональные и неравенства и их системы;
- ✓ использовать в решении задач свойства квадратичной и линейной функций;
- ✓ овладеть методами решения задач с использованием графических интерпретаций;
- ✓ осуществлять выбор метода решения задачи и обосновывать его;
- ✓ уметь преобразовывать иррациональные выражения повышенной сложности;
- ✓ уметь решать иррациональные неравенства, содержащие параметр

Тематическое планирование.
(17 ч)

№ блока	№ п/п	Наименование разделов тем.	Количество часов	Форма деятельности
1	1	Актуализация знаний. Экскурс в историю.	1	Составление опорного конспекта. Проведение теста
		Преобразование иррациональных выражений		
		Сравнение значений иррациональных выражений.	1	Групповая форма работы
	2	Исключение иррациональности в знаменателе (числителе) дробного выражения.	1	Обучающая самостоятельная работа.
	3	Преобразование сложного корня	1	Работа в парах. Самостоятельная работа (проверочная).
	4	Доказательство выражений, в запись которых входят радикалы.	1	Работа в парах
	5	Некоторые приемы упрощения иррациональных выражений.	2	Групповая форма работы.
2		**Решение иррациональных уравнений**		
	1	Традиционные способы решения уравнений.	1	Лекция. Практикум. Самостоятельная работа
	2	Графический способ.	1	Семинар. Индивидуальная работа.
	3	Способ сопряжённого умножения.	1	Работа в парах.
	4	Оригинальные способы решения уравнений	1	Лекция. Практикум. Проведение теста.
	5	Решение систем иррациональных уравнений.	1	Групповая форма работы
3		**Решение иррациональных неравенств**		
	1	Виды иррациональных неравенств.	1	Лекция. Практикум .Групповая работа.
	2	Решение иррациональных неравенств нестандартного типа.	1	Семинар-практикум.
	3	Основные сведения о функциях.		Составление опорного конспекта.
		Преобразование графиков функций, содержащих знак радикала. Построение графиков функций.	1	Самостоятельная работа (групповая форма)
	4	Графическое решение иррациональных неравенств.	1	Работа в парах
	5	Решение иррациональных неравенств с параметрами.	1	Обучающая самостоятельная работа

Приложение

Предлагается провести небольшой тест на понятие иррационального числа

Min-ТЕСТ №1

Число А является иррациональным, если А= $\sqrt{\frac{16}{25}}$;

1. А= $\sqrt{5}$;
2. А=2,5(6);
3. А= $\sqrt{3}-1$;
4. А= $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$;
5. А= $\pi-\sqrt{10}$

Сравнение значений иррациональных выражений

При преобразовании иррациональных выражений предварительно следует выяснить , существует ли это выражение, т.е. все ли величины под корнями чётной степени неотрицательные. Поэтому возникает необходимость сравнивать значения иррациональных выражений. Эта необходимость возникает и при решении многих других задач.

Признак сравнения двух положительных иррациональных выражений.

Пусть $A > 0$ и $B > 0$;

Тогда из неравенства $A^2 \geq B^2$ следует, что $A \geq B$, и наоборот.

Доказательство:

Действительно, $A^2 - B^2=(A-B)(A+B)$;

Т.к .$A+B > 0$, то из неравенства $A^2 - B^2 \geq 0$ следует, что $A - B \geq 0$,т. е. $A \geq B$.

Наоборот, из $A - B \geq 0$, следует, что $A^2 - B^2 \geq 0$, т.е. из $A \geq B$ следует, что $A^2 \geq B^2$.

Пример.

Какое из чисел больше

$\sqrt{5} + \sqrt{7}$ или $\sqrt{3} + \sqrt{8}$.

Решение.

Найдём квадраты этих чисел

$(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2 = 12 + 2\sqrt{35}$

$(\sqrt{3} + \sqrt{8})^2=11+2\sqrt{24}$.

Так как $12 + 2\sqrt{35} >11+2\sqrt{24}$, то $(\sqrt{5} + \sqrt{7}) > (\sqrt{3} + \sqrt{8})$.

Если оба иррациональных выражения отрицательны, то для их сравнения по указанному признаку можно сначала сравнить их абсолютные величины.

Пример №2.

Сравните по величине числа

$\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ и $\sqrt{6}$;

Решение.

Возведём в степень сравнение

$(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{4-3} = 4 + 2=6$

Получили равенство 6=6, поэтому числа равны.

Ответ: числа равны.

Пример № 3.

Сравните числа

$\sqrt{1990}+\sqrt{1992}$ и $2\sqrt{1991}$

Решение:

Пусть a = $\sqrt{1990}+\sqrt{1992}$ и b = $2\sqrt{1991}$

Тогда a² = 1990 + $2\sqrt{1990\cdot1992}$ + 1992 =$2\cdot1991+2\sqrt{1990\cdot1992}$ и b² = 4·1991.

Так как 1990 · 1992 = (1991-1)(1991+1) = 1991² - 1

выражение 1991² - 1 < 1991², то

a² < 2· 1991 + 2 $\sqrt{1991}$ ² =2·1991 + 2·1991 = 4·1991 = b²,

то есть a < b.

Ответ: $\sqrt{1990}+\sqrt{1992}$ < 2 $\sqrt{1991}$

Однако для сравнения некоторых иррациональных выражений вовсе не требуется данный признак, достаточно преобразовать выражение, например, используя формулы квадрата и куба двучлена, тождество $\sqrt{a}$ ² = |a | или

избавить выражение от иррациональности в знаменателе дроби.

Пример № 4.

Сравните значения выражений:

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ и $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$

Решение.

Преобразуем подкоренные выражения

$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = |1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3}$.

$\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3} = \sqrt{3}+1$

Делаем вывод, что выражения равны.

Пример № 5.

Сравните значения выражений:

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

Решение.

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} = \sqrt{2}-1;$

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

Выражения равны.

б) $\dfrac{2}{\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{63}}$ Сравните значение выражения с числом $\dfrac{2}{9}$;

в) $\dfrac{\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{3}}$ Сравните результат с числом $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ Сравните результат с числом $2^{-\frac{5}{3}}$.

№4.

Сравните без помощи микрокалькулятора и таблиц:

а) $1+\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{6}$;

б) $\sqrt[3]{19}-\sqrt{3}$ и 1.

2. Исключение иррациональности из числителя или знаменателя дробного выражения

Вычисление дробных выражений, содержащих радикалы, часто облегчается, если предварительно " уничтожить иррациональность" в числителе или знаменателе, то есть преобразовать дробь так, чтобы в числителе или знаменателе не содержались радикалы.

Чтобы исключить иррациональность из знаменателя (числителя) дроби, достаточно числитель и знаменатель умножить на так называемый дополнительный множитель.

В общем случае трудно указать универсальный способ нахождения дополнительного множителя для произвольного иррационального выражения.

В таблице приведены дополнительные множители для некоторых простейших иррациональных выражений, полученных с помощью формул сокращённого умножения.

Иррациональное алгебраическое выражение	**Дополнительный множитель для иррационального выражения**	**Рациональное алгебраическое выражение (произведение)**
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}=a$
$\sqrt[n]{x^m y^p}$	$\sqrt[n]{x^{n-m} y^{n-p}}$	xy
$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$	$\sqrt{x}\mp\sqrt{y}$	$x - y$
$\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}$	$\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$	$x\pm y$
$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}$ $(n - любое)$	$\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}$	$x - y$
$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$ (n - нечетное)	$\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}$	$x - y$

Примеры.

Исключить иррациональность в знаменатели дроби:

1) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$; 4) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}$; 5) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}}$.

Решение.

1) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}=\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{5\sqrt[4]{125}}{5}=\sqrt[4]{125}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}=\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{5-2}=\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$;

4) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}=\dfrac{3(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})}{(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})}=\dfrac{3(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})}{5-3}=\dfrac{3}{2}(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})$;

5) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}}=\dfrac{4(\sqrt[5]{5^4}+\sqrt[5]{5^3\cdot 3}+\sqrt[5]{5^2\cdot 3^2}+\sqrt[5]{5\cdot 3^3}+\sqrt[5]{3^4})}{5-3}=$

$=2(\sqrt[5]{625}+\sqrt[5]{375}+\sqrt[5]{225}+\sqrt[5]{135}+\sqrt[5]{81})$

Рассмотрим более сложные примеры.

С дробью вида $\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{в}+\sqrt{c}}$ поступают так.

Умножают знаменатель на $\sqrt{a}+\sqrt{в}-\sqrt{c}$ и получают

$(\sqrt{a}+\sqrt{в}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{в}-\sqrt{c})=a+в-c+2\sqrt{ав}$

Затем это выражение умножают на $a+в-c-2\sqrt{ав}$

$((a+в-c)+2\sqrt{ав})((a+в-c)-2\sqrt{ав})=(a+в-c)^2-4ав$

Отсюда видно, что дополнительным множителем для данной дроби может быть произведение

$(\sqrt{a}+\sqrt{в}-\sqrt{c})(a+в-c-2\sqrt{ав})$.

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{в}+\sqrt{c}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{в}-\sqrt{c})(a+в-c-2\sqrt{ав})}{(a+в-c)^2-4ав},$$ где $a\ge 0, в\ge 0, c\ge 0,$ $(a+в-c)^2-4ав\ne 0$

Аналогично можно исключить иррациональность из знаменателей дробей вида

$\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{в}-\sqrt{c}}$ и $\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{в}-\sqrt{c}}$

(предлагается учащимся самостоятельно найти дополнительный множитель для данного вида дробей)

Примеры.

Исключить иррациональность в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$.

Решение.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3-5+2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=$

$\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$.

2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$

Обозначим $1+\sqrt{5}=t$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение ($t+\sqrt{10}$), получаем

$$\frac{1}{1+\sqrt{5}-\sqrt{10}}=\frac{t+\sqrt{10}}{(t-\sqrt{10})(t+\sqrt{10})}=\frac{t+\sqrt{10}}{t^2-10}$$

В результате обратной замены имеем

$$\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{(1+\sqrt{5})^2-10}=\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{1+5+2\sqrt{5}-10}=\frac{(1+\sqrt{5}+10)(2\sqrt{5}+4)}{(2\sqrt{5}-4)(2\sqrt{5}+4)}=\frac{(11+\sqrt{5})(2\sqrt{5}+4)}{20-16}=$$

$$\frac{22\sqrt{5}+44+10+4\sqrt{5}}{4}=\frac{26\sqrt{5}+54}{4}=\frac{13\sqrt{5}+27}{2}.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

Ответы

1) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ — 1) $\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$

2) $\frac{1}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$ — 2) $-\frac{1}{19}(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$

Ответы

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$ — 3) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}}{8}$

4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$ — 4) $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$

5) $\frac{12}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{9}}$ — 5) $4\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}-1)$

6) $\frac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ — 6) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$

Если знаменатель дроби – сумма четырёх квадратных корней $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, причём ab = cd, то исключить иррациональность из знаменателя дроби можно так:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A((\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d}))}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})}{a+b-c-d},$$

где $\begin{matrix} a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0 \\ a+b\neq c+d \end{matrix}$

Примеры: — Ответы:

1) $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$ — 1) $\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{10}-\sqrt{21})$

2) $\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ — 2) -2- $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$

3. Преобразование сложного корня (квадратного и кубического).

Выражение вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ называют сложными квадратными корнями (радикалами). Для их преобразования пользуются формулой

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$;где A>0, B>0 и $A^2-B^2>0$

В правильности этой формулы легко убедится, если возвести обе части формулы в квадрат . Эта формула упрощает сложный радикал, если A^2-B^2 - точный квадрат.

Например:

1) $\sqrt{11-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{11^2-40}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{121-B}}{2}} = \sqrt{\frac{11+9}{2}} + \sqrt{\frac{11-9}{2}} = \sqrt{10} + 1$

2) $\sqrt{15-\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{15+\sqrt{225\ \ -29}}{2}} - \sqrt{\frac{15-\sqrt{225-29}}{2}} = \sqrt{\frac{15+\sqrt{196}}{2}} - \sqrt{\frac{15-\sqrt{196}}{2}} =$

$\sqrt{\frac{15+14}{2}} - \sqrt{\frac{15-14}{2}} = \sqrt{\frac{29}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{29}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{29}-1)}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{58}-\sqrt{2})$

На практике удобно пользоваться более простыми очевидными формулами:

$\sqrt{a+в+2\sqrt{ав}} - /\sqrt{a}+\sqrt{в}/ = \sqrt{a}+\sqrt{в}$

$\sqrt{a+в-2\sqrt{ав}} - /\sqrt{a}+\sqrt{в}/$ где а≥0, в≥0

Рассмотрим примеры:

1) Упростить;

$\sqrt{17+2\sqrt{30}} = \sqrt{15+2+2\sqrt{2}\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{2})^2} = /\sqrt{15}+\sqrt{2}/ = \sqrt{15}+\sqrt{2}$

2) Упростить;

$\sqrt{19-2\sqrt{34}} = \sqrt{17+2-2\sqrt{17}\sqrt{2}} = /\sqrt{17}-\sqrt{2}/ = \sqrt{17}+\sqrt{2}$

3) Упростить;

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Для применения формулы представим данный корень в виде-

$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$, тогда

$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3+1+2\sqrt{3}\sqrt{1}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Упражнения для самостоятельного решения:

Упростить:	Ответы:
1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$	1) $\sqrt{5}-2$
2) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$	2) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$
3) $\sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{28+10\sqrt{3}}$	3) 10
4) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$	4) $\sqrt{5}-2$

Проверочная работа (На два варианта (а) и (б)).

№1 Найти значение выражения.

	Ответы:
а) $\sqrt{13-2\sqrt{22}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$	а) $\sqrt{11}+2$
б) $\sqrt{17+2\sqrt{70}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}}$	б) $\sqrt{10}+3$

№2 Упростить.

Ответы:

а) $\sqrt{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}$ а) $\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{2})$

б) $\sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$ б) $\sqrt{2}-1$

№3 Вычислить.

Ответы:

а) $(\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{13+2\sqrt{42}})$ а) -1

б) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{5+2\sqrt{6}})$ б) -1

№4 Проверьте равенство.

а) $\sqrt{32-10\sqrt{7}}+\sqrt{32+10\sqrt{7}}=10$

б) $\sqrt{8\sqrt{11}+27}-\sqrt{27-8\sqrt{11}}=2\sqrt{11}$

Для упрощения сложных кубических корней, можно подкоренное выражение представить в виде куба двучленна.

Например:

1) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$

2) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$

Упражнения для самостоятельного решения:

Упростить выражения.

Ответы:

1) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ 1) 4

2) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\times\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$ 2) 1

Теперь рассмотрим более сложные примеры:

№1 Упростить выражение.

$(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Решение:

$(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=(\sqrt[6]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$

$(\sqrt[3]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{2-3}=2\sqrt[3]{-1}=-2$

№2 Упростить выражение.

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9+2+2\times3\sqrt{2}}-\sqrt{3+2+2\sqrt{3\times2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{5+1+2\sqrt{5}-1}-\sqrt{5+2+2\sqrt{5\times2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}+3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}-\sqrt{2}}=3$$

Ответ: 3.

4. Доказательство выражений, в записькоторых входят радикалы

При выполнении упражнений на доказательство выражений, в запись которых входят радикалы может быть использована теорема Виета (прямая и обратная). Приведём формулировку теоремы, обратной теореме Виета:

Если числа m и n удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} m+n=-p \\ m\cdot n=q \end{cases}$ *, то они являются корнями уравнения* $x^2+px+q=0$.

Примеры.

№1. Доказать , что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$

Решение.

Обозначим слагаемые в левой части через m и n.

Пусть $\begin{matrix} \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=m, \\ \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=n. \end{matrix}$

Тогда $m\cdot n=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{400-196\cdot 2}=\sqrt[3]{8}=2.$

Если доказываемое равенство справедливо, то m и n по теореме, обратной тереме Виета таковы, что m+n=4 m n =2, то есть m и n должны являться корнями квадратного уравнения $X^2+4X+2=0$, то есть

$$X_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm 2\cdot$$

Значит $\begin{matrix} \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}, \\ \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}. \end{matrix}$

Теперь обязательно нужно убедиться в том, что оба эти равенства верны. Для этого возведём в куб правые части равенства

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^3=8+3\cdot 2^2\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot 2+2\sqrt{2}=8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}=20+14\sqrt{2}$$

$$\left(2-\sqrt{2}\right)^3=20-14\sqrt{2}$$

Таким образом, справедливость равенств доказана.

Затем почленно сложим их и получим нужное утверждение.

$2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4,$ *т.е.*

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

№2. Проверить равенство $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

Решение.

Пусть $\begin{matrix} \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}=m \\ \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=n \end{matrix}$ т.е $\begin{matrix} m\,n=\sqrt[3]{81-80}=1 \\ m+n=3 \end{matrix}$

По теореме обратной теореме Виета m и n являются корнями уравнения

x^2 -3x+1=0,

$X_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, тогда $\begin{matrix} \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(1) \\ \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}(2) \end{matrix}$

Проверим равенства (1) и (2), для чего возведём в куб правые части этих равенств:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{27+3\cdot 9\sqrt{5}+3\cdot 3\cdot 5+5\sqrt{5}}{8}=\frac{72+32\sqrt{5}}{8}=9+4\sqrt{5}=9+\sqrt{80}$$

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3=9-\sqrt{80}$$

Таким образом справедливость равенств доказана.

Сложив почленно (1) и (2) получаем

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Следовательно, получили нужное утверждение.

5. Некоторые приёмы упрощения иррациональных выражений.

1) Способ подстановки.

Данный метод значительно облегчает технику преобразований.

Рассмотрим примеры:

Пример №1

Упростить выражение.

$$\left(\frac{a+\sqrt[4]{a в^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a в}}-\sqrt[4]{a в}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{в}\right)$$

Решение.

Положив $\sqrt[4]{a}=m$ и $\sqrt[4]{в}=n$, получим $\sqrt{a}=m^2$ и $a=m^4$. Данное выражение принимает вид

$$\left(\frac{m^4+mn^3}{m^2+mn}-mn\right):(m-n)$$

Далее имеем

$$\left(\frac{m(m+n)(m^2-mn+n^2)}{m(m+n)}-mn\right):(m-n)=(m-n)^2:(m-n)=m-n$$

Делая обратную замену - имеем $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{в}$

Ответ: $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{в}$.

Пример №2

Упростить выражение.

$$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$

Решение:

Пусть $\sqrt{x+a}=m$ и $\sqrt{x-a}=n$, тогда $\left(\frac{n}{m+n}+\frac{n^2}{mn-n^2}\right):\frac{mn}{/a/}$

Это выражение тождественно равно

$\frac{2mn^2}{n(m^2-n^2)}\times\frac{/a/}{mn}=\frac{/a/}{a}=1$ т.к. по условию а>0

Ответ : 1.

2.Для упрощения ряда алгебраических выражений бывает полезно упростить не сами выражения, а их квадраты.

Пример №1.

Упростить

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$$

Решение:

Пусть А=$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$

Область определения данного выражения

$x \geq 0 \quad x \neq 2$ Ясно, что А>0 при x>2 A<0 при 1≤x<2

Далее имеем $A^2 = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{x-1-2\sqrt{x-1}} = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{x-2\sqrt{x-1}} = 1$

Откуда А=1 при x >2 и А=-1 при 1≤ x<2

Ответ: 1 если x >2.,-1 если 1≤ x <2

Пример №2.

Доказать, что $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ -- число рациональное.

Решение.

Обозначим, через x данное выражение и заметим, что x<0, вычислим x^2.

x =$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$x^2 = 4-2\sqrt{3} - 2\sqrt{16-12} + 4 + 2\sqrt{3}$

$x^2 = 8-4$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

т.к. x<0 , то в нашем случае x=-2

2 способ. $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Представим подкоренное выражение в виде квадрата двучлена.

Иррациональные уравнения

Определение. Иррациональным называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Например, $\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} - 6 = 0$; $\sqrt{x-2} = 2x-1$.

В элементарной математике иррациональные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел.

Сначала, разберём наиболее часто применяемые методы решения иррациональных алгебраических уравнений, так называемые стандартные методы.

К ним отнесём два метода:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) метод введения новых переменных.

1.Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень состоит в следующем:

а) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{q(x)}$;

б) возводят обе части полученного уравнения в n-ю степень: $(\sqrt[n]{f(x)})^n = (\sqrt[n]{q(x)})^n$;

в) учитывая, что $\sqrt[n]{a^n} = a$, получают уравнение f(x)=q(x);

г) решают уравнение и делают проверку , так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень может привести к появлению посторонних корней.

В множестве действительных чисел возведение обеих уравнения в нечётную степень приводит к равносильному уравнению и поэтому проверка не требуется.

<u>Пример №1.</u> Решить уравнение $\sqrt[6]{x-3}=2$.

Решение: Возведём обе части уравнения в шестую степень,
получим X-3=64, откуда X=67.

Проверка. Подставим 67 вместо X в данное уравнение, получим $\sqrt[6]{67-3}=\sqrt[6]{64}=2$, то есть 2=2 – верное равенство.

Ответ: X=67.

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, используя равносильные переходы, то есть

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0 \end{cases} (\text{ или } g(x)\geq 0)$$

При решении иррациональных уравнений следует иметь в виду, что не принадлежащие ОДЗ значения неизвестного всегда посторонние для решаемого уравнения; их можно отбросить без проверки по условию.

ПРИМЕРЫ.

№1. Решить уравнение $\sqrt{7-x}=x-1$.

Решение: $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 7-x=(x+1)^2. \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 1, \\ 7-x=x^2-2x+1. \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 1, \\ x^2-x-6=0. \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 1, \\ x_1=-2; x_2=3. \end{cases}$

$X_1=-2$ - не удовлетворяет условию $x\geq 1$.

Ответ: x=3.

№2. Решить уравнение $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$.

Решение:

$\begin{cases} x+2=2x-5, \\ 2x-5\geq 0. \end{cases}$; $\begin{cases} x=7, \\ x\geq 2{,}5 \end{cases}$; x=7.

Ответ: x = 7.

№3. Решить уравнение $\sqrt{2x^2-3}=\sqrt{2x+9}$.

Решение: $\begin{cases} 2x^2-3=2x+9, \\ 2x+9\geq 0. \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x\geq -4{,}5. \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=3; x_2=-2, \\ x\geq -4{,}5. \end{cases}$.

Ответ: $x_1=3$; $x_2=-2$.

Рассмотрим более сложные иррациональные уравнения, содержащие два или три знака радикала.

Общий метод решения заключается в следующем:

Сначала изолируют один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и так далее. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень ,получается уравнение, в общем случае не равносильное данному, поэтому проверка найденных значений неизвестного по условию данного уравнения обязательна, то есть является составной частью решения.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1}$

Возведём обе части уравнения в квадрат $(\sqrt{2x+6})^2=(6-\sqrt{x-1})^2$

$2x+6=36-12\sqrt{x-1}+x-1$, $12\sqrt{x-1}=29-x$

Ещё раз возведём обе части уравнения в квадрат, получим $144(x-1)=(29-x)^2$,то есть $x^2-202x+985=0$, откуда $x_1=5; x_2=197$.

Проверка: 1) при x=5 имеем $\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=2+4=6$; 6=6. X=5 – является корнем заданного уравнения.2) при x=197 имеем $\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$, то есть x=197 – посторонний корень.

Ответ: x=5.

Приложение 3

Решение иррациональных неравенств

а) Иррациональные неравенства и способы решения простейших неравенств.

Иррациональными неравенствами называются неравенства, в которых переменные входят под знаком корня.

Решения иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что здесь, как правило исключена возможность проверки, поэтому все преобразования стараются делать равносильными.

Основным методом решения иррациональных неравенств являются метод сведения исходного неравенства к равносильной системе или к совокупности систем рациональных неравенств.

Простейшие неравенства – это неравенства следующих типов:

1) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

2) $\sqrt{f(x)} > g(x)$

3) $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Нестрогие неравенства, аналогичные выписанным выше (со знаком ≤ и ≥), мы будем относить к соответствующему типу: так, оба неравенства $\sqrt{5x+8} > \sqrt{4x^2-1}$ и $\sqrt{5x+8} \ge \sqrt{4x^2-1}$ относятся к первому типу и т.п.

Поскольку обе части неравенства (1) неотрицательны, оно очевидно, равносильно системе

$$\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \qquad (1')$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \qquad (2)$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \qquad (2')$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) < g^2(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) \le g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \qquad (3')$$

Мы видим, что самый громоздкий – второй случай. Это происходит из-за того, что здесь возможны два варианта – когда первая часть g(x) неотрицательна и когда она меньше нуля.

В первом варианте обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому его можно почленно возводить в квадрат, а во втором случае возводить в квадрат нельзя

2. Метод введения новых переменных

Другим приёмом решения иррациональных уравнений является способ введения новых переменных, относительно которых получается либо более простое иррациональное уравнение, либо рациональное уравнение.

Пример1.

Решить уравнение $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

Решение: Обозначим $\sqrt{x^2+11}=t$, тогда $x^2+11=t^2$, при этом $x^2+11\geq 0$ для всех $x\in R$

$t\geq 0$.

Получим $t^2+t-42=0$

По теореме ,обратной теореме Виета $\begin{matrix} t_1+t_2=-1 \\ t_1\cdot t_2=-42 \end{matrix}$ то есть $\begin{matrix} t_1=-7 \\ t_2=6 \end{matrix}$

$$\begin{cases} t^2+t-42=0 \\ t\geq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} t_1=-7 \\ t_2=6 \\ t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow t=6.$$

Обратная замена $\begin{matrix} \sqrt{x^2+11}=6 \\ x^2+11=36 \\ x^2=25 \\ x_{1,2}=\pm 5 \end{matrix}$ Устная проверка .

Ответ: $x_1=-5; x_2=5.$

<u>Графическое решение уравнений</u>

На практике довольно часто оказывается полезным *графический метод решения* уравнений. Он заключается в следующем:

для решения уравнения f(x} = 0, надо построить график функции y = f(x) и найти абсциссы точек пересечения графика с осью X; эти абсциссы и являются корнями уравнения.

Например, надо решить уравнение $\sqrt{x}-2+x=0$.

Часто уравнение f(x)=0 заменяют равносильным g(x) =h(x), затем строят графики функций y = g(x) и y=h(x) (если это проще, чем построение графика функции y = f(x)) и находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Так уравнение $\sqrt{x}-2+x=0$ можно преобразовать к виду $\sqrt{x}=2-x$ и найти абсциссы точек пересечения этих графиков.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $\sqrt{x}=|x-2|$

Решение: Построим в одной системе координат графики функций y= $\sqrt{x}$ и y= $|x-2|$

y= $|x-2|$ - график получается смещением графика функции y= $|x|$ на единицы вправо вдоль оси OX. Графики функций пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1\approx 1; x_2\approx 4$

(проверкой следует убедиться в точности результатов)

Ответ: $x_1=1$; $x_2=4$.

Надо отметить, что графический метод даёт приближённые ответы. При необходимости проверкой убеждаемся в точности полученных результатов.

Способ сопряжённого умножения

В основе рассматриваемого способа лежит формула: $(\sqrt{a}-\sqrt{в})(\sqrt{a}+\sqrt{в})=a-в$

Выражения $\sqrt{a}-\sqrt{в}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{в}$ мы будем называть сопряжёнными, Иногда использование этой формулы облегчает решение.

Пример1 Решить уравнение $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}=2x-1$

Решение: Домножим левую и правую часть уравнения на сумму радикалов, стоящих в левой части. Получаем

$$\left(\sqrt{5x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)$$

$$4x-2=(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)$$

$$2(2x-1)=(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)$$

$$(2x-1)\left(2-\left(\sqrt{5x+1}\right)+\sqrt{x+3}\right)\ )=0$$

$$2x-1=0.....или.........\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}=2$$

$$.x=\frac{1}{2}$$

Решим второе уравнение методом введения новых переменных.

Пусть $t=\sqrt{x+3}\ge 0,$ тогда

$$x+3=t^2$$

$$5x+15=5t^2$$

$$5x+1=5t^2-14,$$

$$\sqrt{5t^2-14}+t=2$$

$$\sqrt{5t^2-14}=2-t,$$

$$\begin{cases}5t^2-14=(2-t)^2\\ 2-t\ge 0\end{cases};\begin{cases}2t^2+2t-9=0\\ t\le 2\end{cases}$$

Решая уравнение $2t^2+2t-9=0$, получаем два корня

$t_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{76}}{4}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{19}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{2}$, так как $0\le t\le 2$, то $t_1=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{2}$.

Выполняя обратную замену, имеем x+3=$\left(\dfrac{-1+\sqrt{19}}{2}\right)^2$

X+3 = $\dfrac{10-\sqrt{19}}{2}$, значит x = $\dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2}; x_2=\dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Заметим, что умножение на сумму радикалов в данном случае не приводит к появлению посторонних корней – ведь область определения этой сумму та же, что исходного уравнения , и она положительна, как сумма отрицательных слагаемых, не обращающихся, очевидно в ноль одновременно.

Отметим также, что решить уравнение « в лоб» довольно трудно – оно путём громоздких вычислений сводится к уравнению четвёртой степени.

Пример 2.

Решить уравнение: $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1(*)$

Решение. Умножим обе части уравнения $(*)$ на сопряжённое левой части выражение, то есть на $\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}\ne 0$, так как $3x^2+5x+8>0$ при $x\in R$, так как D< 0.

Получаем

$$\left(\sqrt{3x^2+5x+8}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)^2=\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}$$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=7(**)$$

Сложим почленно уравнения $(*)$ и $(**)$,получим $2\sqrt{3x^2+5x+8}=8$

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4$$

$$3x^2+5x+8=16$$

$$3x^2+5x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3(-8)}}{6}=\frac{-5\pm11}{6}$$

$x_1=-\frac{8}{3};x_2=1.$

Проверка.

1) X=$-\frac{8}{3}$, то $\sqrt{3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+8}-\sqrt{3\left(-\frac{8}{3}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+1}=1$

$1=1$

То есть x $=-\frac{8}{3}$ - корень уравнения

2) X=1, то $\sqrt{3\cdot1+5\cdot1+8}-\sqrt{3+5+1}=4-3=1$; 1=1.

X=1- корень уравнения.

Ответ: $x_1=-\frac{8}{3}, x_2=1$.

Оригинальные способы решения иррациональных уравнений

В ряде случаев достаточно внимательно проанализировать область определения уравнения, сравнить подкоренные выражения и решение оказывается совершенно простым

Пример 1

Решить уравнение: $\sqrt{x-3}+\sqrt{3x+5}=\sqrt{3-x}+\sqrt{6x-4}$

Решение: Обратим внимание на подкоренные выражения x-3 и 3-x. Оба этих выражения должны быть неотрицательны, то есть

$\begin{cases}x-3\ge0\\3-x\ge0\end{cases}$; $\begin{cases}x\ge3\\x\le3\end{cases}$, значит x =3.

Проверка: 0+$\sqrt{3\cdot3+5}=\sqrt{14}$

0+$\sqrt{6\cdot3-4}=\sqrt{14}$

$\sqrt{14}=\sqrt{14}$

Ответ: x = 3.

Пример 2

Решить уравнение: $\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x-1}=1$

Решение: Так как разность между двумя радикалами равна 1, то 2x-3>2x-1,

то есть -3>-1, что неверно,

а значит, уравнение корней не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 3

Решить уравнение: $5\sqrt{x} - 3\sqrt{-x} + \frac{17}{x} = 4$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ -x \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$ система не имеет решений.

Ответ: нет корней.

Пример 4

Решить уравнение: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} = 4$.

Решение: ОДЗ $x \ge 2$, x-2<x+3 для всех $x \in R$, значит

$\sqrt{x-2} < \sqrt{x+3}$, то есть $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} < 0$, то есть уравнение не имеет решений.

Рекомендуемая литература

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учеб. пособие для школ и классов с углуб. изуч. матем. – М.: Просвещение, 1995.
2. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989.
3. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Решение задач: Учебное пособие для 11 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1995.
4. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре 8-9 класс – М.:Просвещение,1994
5. Ткачук В.В. Математика-абитуриенту. Том1 и2.М.:Теис 1994.
6. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.задачи по математике. Уравнения и неравенства- М. наука главная редакция физико-математической литературы 1989
7. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами в ЕГЭ С-Петербург 2006
8. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы: условия и решения. – М.: Школа-Пресс, 1994.
9. Семенов П.В. выражения и преобразования, учебное пособие -М. МНЦНМО. 2008